2015 年第七届预赛（非数学类）参考答案

一、每小题 6 分，共计 30 分。

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ $\underline{\quad \dfrac{2}{\pi} \quad}$ 。

解：由于 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi \le \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}} \le \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi$, 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}。$$

所以所求极限是 $\dfrac{2}{\pi}$.

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$。则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\quad z-xy \quad}$ 。（本小题结果要求不显含 F 及其偏导数）

解：方程对 x 求导，得到 $\left(1+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{z}{x^2}\right)F_v=0$

即 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(zF_v-x^2F_u)}{xF_u+yF_v}$。

同样，方程对 y 求导，得到 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x(zF_u-y^2F_v)}{xF_u+yF_v}$。

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z(xF_u+yF_v)-xy(xF_u+yF_v)}{xF_u+yF_v}=z-xy$

（3）曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 $\underline{\quad \dfrac{\pi}{2} \quad}$ 。

解：曲面$z=x^2+y^2+1$在点 M(1,-1,3)的切平面：$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0$，

即$z=2x-2y-1$。联立$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x-2y-1 \end{cases}$，

得到所围区域的投影 D 为：$(x-1)^2+(y+1)^2\le 1$。

所求体积$V=\iint\limits_D [(2x-2y-1)-(x^2+y^2)]dxdy=\iint\limits_D [1-(x-1)^2-(y+1)^2]dxdy$

令$\begin{cases} x-1=r\cos t \\ y+1=r\sin t \end{cases}$，$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1(1-r^2)rdr=\dfrac{\pi}{2}$。

（4）函数 $f(x)=\begin{cases} 3,\ x\in[-5,0) \\ 0,\ x\in[0,5) \end{cases}$在$(-5,5]$的傅立叶级数在 x=0 收敛的值 3/2 。

解：由傅里叶收敛定理，易知 $f(0)=3/2$.

（5）设区间$(0,+\infty)$上的函数$u(x)$定义为$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt$，则$u(x)$的初等函数表达式为

$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$。

[解] 由于 $u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint\limits_{s\ge0,t\ge0}e^{-x(s^2+t^2)}dsdt$，故有

$$u^2(x)=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho(x\rho^2)=-\frac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\frac{\pi}{4x}。$$

所以$u(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$。

二、（12 分）设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解：显然，$O(0,0,0)$为 M 的顶点，$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$在 M 上。由 A,B,C 三点决定的平面$x+y+z=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线 L 是 M 的准线。----------------------------4 分

设 $P(x,y,z)$是 M 上的点，(u,v,w)是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为$\dfrac{x}{u}=\dfrac{y}{v}=\dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{t}$，

即 $u=xt,v=yt,w=zt$。--8 分

代入准线方程，得$\begin{cases} (x+y+z)t=1 \\ (x^2+y^2+z^2)t^2=1 \end{cases}$。

消除 t，得到圆锥面 M 的方程$xy+yz+zx=0$。---12 分

三、（12 分）设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

证明 1. 若 $\beta=0$。

对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x),\quad f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),\cdots,\ f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x)。$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。 ----------------------------------4 分

2. 若 $\beta\neq 0$。对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \qquad （1）$$

其中 $A_1=1/\beta, B_1=\alpha/\beta$。 -----------------------6 分

因为（1）右端可导，从而

$$f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x)。$$ ---------------------8 分

设 $f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x), n>1$，则 $f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x)$。

故 $f(x)$ 任意阶可导。 -----------------------------------12 分

四、（14 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数

解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$。

固收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。---4 分

由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\ (n\geq 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域皆为 $(-\infty,+\infty)$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n 。$$

---------------------------------------7 分

用 $S_1(x)$，$S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和函数。依据 e^x 的展开式得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=(x-1)^2e^{x-1},\qquad S_2(x)=e^{x-1}$$

再由

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=e^{x-1}-1$$

得到，当 $x\neq 1$ 时 $S_3(x)=\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1)$。--10 分

又 $S_3(1)=1$。---12 分

综合以上讨论，最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$$ ----------14 分

五、（16 分）设函数 f 在[0,1]上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 xf(x)dx=1$。试证：

（1）$\exists x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$

（2）$\exists x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$

证明：（1）若 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 4$，则

$$1=\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$$ ----------------4 分

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$。而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$，

故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$， -------------8 分

所以对于任意的 $x\in[0,1]$，$|f(x)|=4,$ 由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。

这就与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

故 $\exists x_0\in[0,1],$ 使 $|f(x_0)|>4$ ------------10 分

（2）先证 $\exists x_2 \in [0,1]$，使 $\left|f(x_2)\right| < 4$。若不然，对任何 $x \in [0,1]$，$\left|f(x)\right| \ge 4$ 成立。则，$f(x) \ge 4$ 恒成立，或者 $f(x) \le -4$ 恒成立，与 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。再由 $f(x)$ 的连续性及（1）的结果，利用介值定理 $\exists x_1 \in [0,1]$ 使 $\left|f(x_1)\right| = 4$。 --------------------16 分

六、（16 分）设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \le 1$ 上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \le M$。若 $f(0,0)=0$，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，证明

$$\left|\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy\right| \le \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。$$

证明： 在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y) = \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(\theta x,\theta y),$$

其中 $\theta \in (0,1)$。 ---------6 分

记 $(u,v,w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(\theta x,\theta y)$，则

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(ux^2 + 2vxy + wy^2\right)。$$

由于 $\|(u,\sqrt{2}v,w)\| = \sqrt{u^2+2v^2+w^2} \le \sqrt{M}$ 以及 $\|(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\| = x^2+y^2$，我们有

$$|(u,\sqrt{2}v,w)\cdot(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)| \le \sqrt{M}\left(x^2+y^2\right),$$

即

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)。$$ -----------13 分

从而

$$\left|\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy\right| \le \frac{\sqrt{M}}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。$$ -------16 分